Graphes

$\boxed{D}$ quelques définitions

- un graphe d'**ordre n** $\in \mathbb{N}^*$ est un ensemble de n points appelés **sommets** du graphe : certains sommets sont reliés
- si tous les liens entre deux sommets sont des traits on dit le graphe est ***non orienté*** et chacun de ces traits est une **arête** du graphe
- si tous les liens entre certains sommets sont des flèches on dit que le graphe est **orienté** et chacune de ces flèches est un **arc**
- une arête ou un arc qui relie un sommet à lui-même est une **boucle**
- dans un graphe ***non orienté*** si une arête relie A et D on note $A - D$ ou $D - A$
- dans un graphe **orienté** si un arc va du sommet E vers le sommet F on écrit $E \to F$ (la flèche impose donc un sens)
- dans un graphe ***non orienté*** les sommets A et B **sont adjacents** lorsque $A - B$ ou $B - A$
  (partant de A on peut atteindre B en 1 pas et réciproquement)
- dans un graphe **orienté** le sommet B est adjacent à A lorsque $A \to B$ (*le sommet d'arrivé est adjacent au sommet de départ*)
  (partant de A on peut atteindre B en 1 pas)
- le **degré d'un sommet** est le nombre de traits partant ou allant vers ce sommet sans tenir compte du sens des flèches si le graphe est orienté ; dans un graphe orienté ou non une boucle comptera pour 2 dans la détermination du degré de ce sommet
- un graphe est **complet** lorsqu'il ne contient aucune boucle et que tout sommet est adjacent à chacun des autres sommets

$\boxed{P}$ Dans un graphe ***non orienté***, la somme des degrés de chaque sommet est égale au double du nombre d'arêtes.

$\boxed{D}$ matrice d'adjacence d'un graphe orienté ou non orienté

On considère un graphe dont les sommets sont notés de 1 à n

- si ce graphe est ***non orienté*** la **matrice d'adjacence** est la matrice carrée d'ordre n (n lignes et n colonnes) dont le coefficient $a_{i,j}$ est :

— égal à $\mathbf{1}$ lorsque ***i* et *j* sont adjacents** (il existe une arête reliant les sommets i et j)

— égal à $\mathbf{0}$ sinon, c'est-à-dire lorsque i et j **ne sont pas** adjacents

- si ce graphe est **orienté** la **matrice d'adjacence** est la matrice carrée d'ordre n (n lignes et n colonnes) dont le coefficient $a_{i,j}$ est :

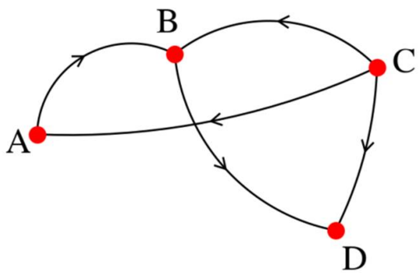
— égal à $\mathbf{1}$ lorsque ***j* est adjacent à *i*** (il existe un arc de i vers j)

— égal à $\mathbf{0}$ sinon c'est-à-dire lorsque j n'est pas adjacent à i

$\boxed{i}$ la matrice d'un graphe orient est forcément symétrique

- pour un graphe ***non orienté*** une **chaîne reliant deux sommets A** et F est une liste de sommets dont le début est A et la fin F telle que l'on passe d'un sommet au suivant de cette liste par une arête du graphe, le nombre d'arêtes de cette liste est la **longueur de la chaîne**
- pour un graphe **orienté** un **chemin allant du sommet A au sommet** F est une liste débutant en A et finissant en F telle que l'on passe d'un sommet de la liste au suivant par une flèche du graphe,
  le nombre de flèches dans cette liste est la **longueur du chemin**
- un graphe non orienté est **connexe** lorsqu'il existe une chaîne entre deux sommets quelconques de ce graphe
- une chaîne/chemin dont l'origine et l'extrémité sont confondues est dit(e) **fermé(e)**
- une chaîne/chemin fermé(e) composé(e) d'arêtes/flèches toutes distinctes est un cycle/circuit.

G01 On considère le graphe $\mathcal{G}$:



- $\mathcal{G}$ est-il orienté ou non orienté, quel est son ordre ?
- pour chacun des sommets, indiquer son degré
- $C \to B \to D$ est un chemin de longueur 2 débutant au sommet C et aboutissant au sommet D : donner un autre chemin de longueur 2 aboutissant en D
- donner la matrice d'adjacence de $\mathcal{G}$

$\boxed{P}$ **théorème du nombre de chemins ou chaînes de longueur k**

M est la matrice d'adjacence d'un graphe (orienté ou non) dont les sommets sont numérotés de 1 à n, k est un entier naturel non nul :

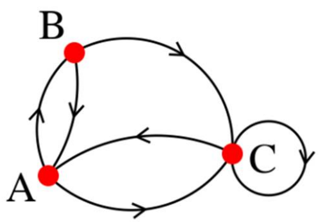
- cas d'un graphe <u>**orienté**</u>

le <u>nombre de chemins de longueur k</u> allant du sommet i au sommet j est égal au coefficient de M^k situé à la l'intersection de la ligne i et de la colonne j

- cas d'un graphe ***non orienté***

le <u>nombre de chaînes de longueur k</u> d'extrémités les sommet i et j est égal au coefficient de M^k situé à la l'intersection de la ligne i et de la colonne j

G02 On note M la matrice d'adjacence du graphe orienté ci-dessous

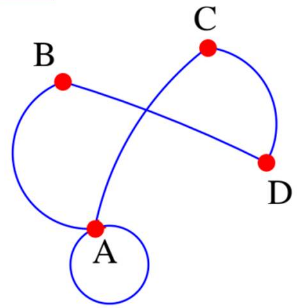


- vérifier que :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

- déterminer le nombre de chemins de longueurs 3 allant de B à A, les écrire tous

G03 M est la matrice d'adjacence du graphe non orienté ci-dessous :



- donner M puis vérifier que :

$$M^4 = \begin{pmatrix} 15 & 7 & 7 & 10 \\ 7 & 9 & 9 & 2 \\ 7 & 9 & 9 & 2 \\ 10 & 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

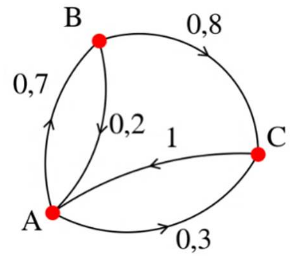
- combien y a-t-il de chaînes de longueurs 4 d'extrémités C et A ? Les écrire toutes.

$\boxed{D}$ **quelques définitions**

- un graphe orienté ou non est **pondéré** lorsque ses flèches/arêtes sont affectées de nombres positifs
- le **poids** d'un chemin/d'une chaîne est la somme des poids des flèches/arêtes qui le(la) composent
- un **graphe probabiliste** est un graphe **orienté pondéré** tel que les poids de chaque flèche **appartient à l'intervalle $[0\,;1]$** et tel que la somme des poids des chemins **partant d'un même sommet** est égale à 1
- la matrice construite à partir d'un graphe probabiliste pour laquelle à l'intersection de la ligne i et colonne j figure le poids de la flèche allant de i vers j s'appelle **matrice stochastique**

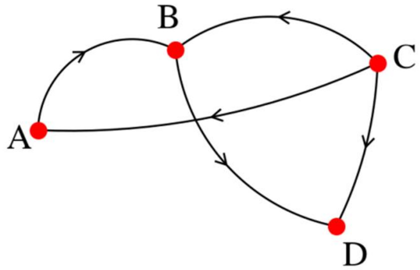
G04 On considère un graphe probabiliste à deux sommets A et B tel que : $p_A(A) = 0{,}3$ et $p_B(A) = 0{,}4$. Représenter ce graphe probabiliste puis donner la matrice stochastique , les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique.

G05 On considère le graphe probabiliste :



1. Interpréter les nombres 0,7 et 0,8 en terme de probabilités conditionnelles.
2. Donner la matrice stochastique.

G01 On considère le graphe $\mathcal{G}$:



• $\mathcal{G}$ est-il orienté ou non orienté, quel est son ordre ?

l'ordre de ce graphe est le nombre de ses sommets, c'est donc 4

• pour chacun des sommets, indiquer son degré

sommet	A	B	C	D
degré	2	3	3	2

• $C \to B \to D$ est un chemin de longueur 2 débutant au sommet C et aboutissant au sommet D, donner un autre chemin de longueur 2 aboutissant en D

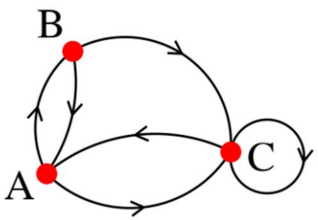
Un autre chemin de longueur 2 aboutissant en D est : $A \to B \to D$

• donner la matrice d'adjacence de $\mathcal{G}$

• la matrice d'adjacence est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

G02 **On note M la matrice d'adjacence du graphe orienté ci-dessous**



• vérifier que :

$$\boldsymbol{M^3} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

• déterminer le nombre de chemins de longueurs 3 allant de B à A, les écrire tous

• la matrice d'adjacence est : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

calculons M^3 :

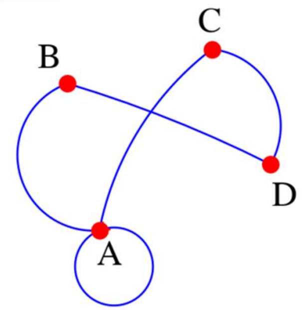
$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

On a donc bien : $\boldsymbol{M^3} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$.

• on s'intéresse à un chemin de longueur 3 donc on utilise M^3 : le coefficient à l'intersection de la ligne B et de la colonne A est 3 donc il y a 3 chemins de longueur 3 allant de B à A, ce sont :

$$B \to A \to C \to A \qquad B \to A \to B \to A \qquad B \to C \to C \to A$$

G03 M est la matrice d'adjacence du graphe non orienté ci-dessous :



• donner M puis vérifier que :

$$M^4 = \begin{pmatrix} 15 & 7 & 7 & 10 \\ 7 & 9 & 9 & 2 \\ 7 & 9 & 9 & 2 \\ 10 & 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

• combien y a-t-il de chaînes de longueurs 4 d'extrémités C et A ? Les écrire toutes.

• La matrice d'adjacence est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculons M^4 en remarquant que $M^2 \times M^2 = M^4$

$$\begin{array}{ccc}
 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 15 & 7 & 7 & 10 \\ 7 & 9 & 9 & 2 \\ 7 & 9 & 9 & 2 \\ 10 & 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}
\end{array}$$

On a donc bien : $M^4 = \begin{pmatrix} 15 & 7 & 7 & 10 \\ 7 & 9 & 9 & 2 \\ 7 & 9 & 9 & 2 \\ 10 & 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$.

• combien y a-t-il de chaînes de longueurs 4 d'extrémités C et A ?
Les écrire toutes.
On cherche une information sur les chaînes de longueur 4 donc on doit utiliser M^4 : à l'intersection de la ligne C et de la colonne A de M^4 on lit le nombre 7 donc il y a 7 chaînes de longueur 4 d'extrémités C et A :

$C - A - A - A - A$ $\quad$ $C - A - A - C - A$ $\quad$ $C - A - C - A - A$
$C - A - B - A - A$ $\quad$ $C - A - A - B - A$ $\quad$ $C - D - B - A - A$
$C - D - C - A - A$